程式設計（105-2）
第一次期中考

題目設計：孔令傑
國立臺灣大學資訊管理學系

請為下列的每一題各寫一個 C++ 程式。每一題都允許用任何方法作答。所有分數都根據程式運算的正確性給分。一題若有 n 分，則前 $n-10$ 分由 $\frac{n-10}{2}$ 筆測試資料判定分數，一筆測試資料佔 2 分；後 10 分由 5「組」測試資料判定分數，每一組裡面有若干筆測試資料，全對的話才能得到 2 分。

第一題

（20 分）給定 n 個互不相同的整數 x_1、x_2 直到 x_n，如果對於 x_i 存在一個 x_j 使得 $x_j^2 = x_i$，則我們說 x_i 是另外一個整數的平方。請判斷給定的整數中有多少個整數是另外一個整數的平方，並將這些是別的整數的平方的整數印出來。

輸入輸出格式

系統會提供許多筆測試資料，每筆測試資料裝在一個檔案裡。每個檔案只有一列，存放 $n+1$ 個整數 n、x_1、x_2、$\cdots$、x_n。已知 $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq 100000$ 以及 $1 \leq n \leq 1000$。任兩個數字之間都用一個空白鍵隔開。請找出是另一個整數的平方的所有整數，並且由小到大印出來。印出的每兩個整數間用一個空白隔開。

舉例來說，如果輸入是

```
5 1 3 5 9 25
```

則輸出應該是

```
9 25
```

第二題

（30 分）給定一個 $n \times n$ 的二維整數矩陣 A（如果你真的沒學過矩陣，那反正就是有一張 n 列 n 欄的表格，裡面每一個格子裝著一個整數），令 A_{ij} 為第 i 列第 j 欄的整數。在這個矩陣 A 裡面有幾個 $m \times m$（$1 \leq m \leq n$）的方形子矩陣呢？顯然 1×1 的子矩陣有 n^2 個、2×2 的子矩陣有 $(n-1)^2$ 個、$\cdots$，而 $n \times n$ 的子矩陣只有 1 個，因此我們一共有 $\sum_{i=1}^{n} i^2$ 個方形的子矩陣。給定一個 $n \times n$ 的矩陣，我們想要找出該方形子矩陣內所有整數相加為零的子矩陣個數。

輸入輸出格式

系統會提供許多筆測試資料，每筆測試資料裝在一個檔案裡。在每個檔案中，第一列存放一個整數 n。在第二列至第 $n+1$ 列中，第 $i+1$ 列存放 $A_{i,1}$、$A_{i,2}$、$\cdots$、A_{in}。已知 $1 \leq n \leq 30$ 以及

$-100 \leq A_{ij} \leq 100$。每一列中的任兩個數字之間都用一個空白鍵隔開。請在所有的 $\sum_{i=1}^{n} i^2$ 個方形子矩陣中，找出其內的數字和為零的方形子矩陣個數，印出該數字，接著印出 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$；兩個整數之間用一個空白鍵隔開。

舉例來說，如果輸入是

```
4
1 2 3 4
-2 -1 3 1
0 1 -3 3
2 4 -4 4
```

則輸出應該是

```
5 18
```

其中有一個 1×1 的方形子矩陣、三個 2×2 的方形子矩陣，以及一個 3 的方形子矩陣。

第三題

（20 分）有一種特別的五子棋遊戲，規則如下。在一個九乘九的棋盤上，兩人依序下黑子跟白子，但是不能下在 $(3,3)$、$(3,7)$、$(5,5)$、$(7,3)$、$(7,7)$ 這幾個點，如圖 1 所標示的五個叉號位置。

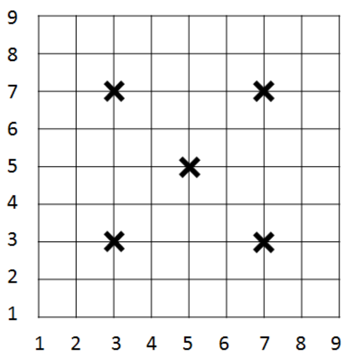

圖 1: 棋盤與不能落子的點

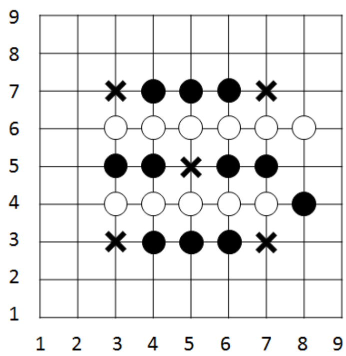

圖 2: 分數計算範例

兩人必須先約定一個可落子次數 n，然後持續落子直到雙方各下了 n 顆棋子為止。接著雙方各自結算黑子與白子各連成幾條橫、直或斜的長度為五的線段，而一顆棋子可以被算在複數個線段中（例如一條長度為七的線段算是三條長度為五的線段）。遊戲由連成較多條長度為五的線段的玩家獲勝。要特別注意的是，不能落子的那五個點，在兩個玩家計算線段數的時候可以被視為黑子或白子，亦即在持黑子的玩家計算黑色線段數時，那五個點就視為黑子；持白子的玩家計算時，則視為白子。舉例來說，假設 $n = 11$，且 22 顆黑子與白子被下成如圖 2 所示，則黑方得到 3 分（三條橫線段）而白方得到 5 分（三條橫線段與兩條斜線段）。請注意位在 $(5,5)$ 的不可落子處既被視為黑子，也被視為白子。

在本題中，你將被給定兩位玩家的落子位置，而你將計算兩位玩家各得到幾分（完成幾個長度為五的線段）。

輸入輸出格式

系統會提供許多筆測試資料，每筆測試資料裝在一個檔案裡。在每個檔案中，第一列存放一個整數 n。第二列存放 $2n$ 個整數 x_1^B、y_1^B、x_2^B、y_2^B 直到 x_n^B、y_n^B，表示第 i 個黑子被放在位置 (x_i^B, y_i^B) 上。第三列存放 $2n$ 個整數 x_1^W、y_1^W、x_2^W、y_2^W 直到 x_n^W、y_n^W，表示第 i 個白子被放在位置 (x_i^W, y_i^W) 上。已知 $1 \leq n \leq 38$、棋子位置都沒有超出棋盤、沒有任兩個棋子被放在同一個位置上，也沒有旗子被放在不可落子的五個位置上。每一列中的任兩個數字之間都用一個空白鍵隔開。請在棋子都被放好之後，依序印出黑子與白子的得分，並用一個空白鍵隔開兩個整數。

舉例來說，如果輸入是

```
11
4 3 5 3 6 3 8 4 3 5 4 5 6 5 7 5 4 7 5 7 6 7
3 6 3 4 4 6 4 4 5 6 5 4 6 6 6 4 7 6 7 4 8 6
```

則遊戲結局會如圖 2 所示，輸出應該是

```
3 5
```

第四題

（30 分）你是一家零售業者的作業長（chief operations officer，COO，厲害吧），現在正想要解決一個補貨的問題。在一個區域裡，你有 m 個零售店，都銷售同一種商品，其中零售店 i 落在 (x_i, y_i) 位置上（單位為公里）。你另外有 n 個物流中心，其中物流中心 j 落在 (u_j, v_j) 位置上（單位為公里）。由於這個區域的路都是東西向或南北向的，因此點和點之間的距離是用曼哈頓距離（Manhattan distance）計算，而非歐幾里得距離（Euclidean distance）。更精確地說，物流中心 j 到零售店 i 的距離是

$$d_{ij} = |u_j - x_i| + |v_j - y_i| \text{ 公里。}$$

每家零售店的商品售價都一樣是 p，但他們的需求不一樣。我們將零售店 i 的需求量稱為 D_i，表示在這家店每天最多能賣掉 D_i 個商品。要賣東西有個前提，就是前一天晚上要補貨。對於任意一家零售店，你必須決定由哪個（或哪幾個）物流中心來補貨給它；如果你指定了複數個物流中心給它，還必須指定個別的補貨數量。補貨成本和補貨數量與補貨距離的乘積成正比，每個商品每公里的單位補貨成本是 c 元。更精確地說，若物流中心 j 每晚送 x_{ij} 個商品到零售店 i，則其補貨成本為

$$c_{ij}(x_{ij}) = cd_{ij}x_{ij} \text{ 元。}$$

對於這些商品，在零售店 i 的銷貨毛利就是 $(p - cd_{ij})x_{ij}$ 元了。當然，如果一家店只能賣 100 個商品，而你補 1000 個給它，最後也只能賣出 100 個，剩下 900 個都是浪費錢而已。

給定上述資訊，你的任務是找出能夠最大化總銷貨毛利的補貨方式；更精確地說，你必須決定上述的 x_{ij}，來求解

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(p - cd_{ij})x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq D_i \quad \forall i = 1, ..., m \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, ..., m, j = 1, ..., n\text{。} \end{aligned}$$

請注意兩件事情。首先，如果有一家店的補貨成本恰好等於商品售價，那麼請你對它進行補貨以滿足其所有需求。其次，請注意你不一定要滿足所有需求。舉例來說，要是有些店被蓋在非常偏遠的地方，導致補貨成本大於售價，那最好的作法就是不要補貨（這家店就去賣其他東西就好）。換句話說，在很詭異的情況下，搞不好最佳方案是不要補貨給任何一家店。

輸入輸出格式

系統會提供許多筆測試資料，每筆測試資料裝在一個檔案裡。在每個檔案中，第一列存放四個整數 n、m、p 和 c。第二列存放 $2n$ 個整數 u_1、v_1、u_2、v_2 直到 u_n、v_n，表示第 i 個物流中心在位置 (u_i, v_i) 上。第三列存放 $2m$ 個整數 x_1、y_1、x_2、y_2 直到 x_n、y_n，表示第 i 個零售店在位置 (x_i, y_i) 上。第四列存放 m 個整數 D_1、D_2 直到 D_m，表示第 i 個零售店的需求量是 D_i。每一列中的任兩個數字之間都用一個空白鍵隔開。已知 $1 \leq n \leq 10$、$1 \leq m \leq 1000$、$1 \leq p \leq 500$、$1 \leq c \leq 10$、$0 \leq x_i \leq 200$、$0 \leq y_i \leq 200$、$0 \leq u_i \leq 200$、$0 \leq v_i \leq 200$，以及 $1 \leq D_i \leq 100$。

請根據題目的描述，找出能最大化總銷貨毛利的補貨計畫，並且印出兩個整數，分別代表在最佳補貨計畫下能賺到的總銷貨毛利以及未被滿足的需求總量。舉例來說，如果輸入是

```
2 6 5 1
2 2 4 5
1 1 1 2 2 5 3 1 7 1 8 4
3 4 5 6 7 8
```

則輸出應該是

```
58 7
```

其中總銷貨毛利是 $3(5-2)+4(5-1)+5(5-2)+6(5-2)=58$，在零售店 1 到 4 賺得的；未滿足需求總量是 7，零售店 5 的需求量總和。請注意零售店 6 的銷貨毛利剛好是 0（從最近的物流中心進行補貨的成本恰好等於售價），所以它對總銷貨毛利沒有貢獻，但是它的需求也被視為已滿足。